Warunek plastyczności i funkcja dyssypacji materiałów porowatych

JEL: L62 DOI: 10.24136/atest.2018.477

Data zgłoszenia: 19.11.2018 Data akceptacji: 15.12.2018

W artykule zaproponowano warunek plastyczności i wyprowadzono związany z nim potencjał dyssypacji stosując osobliwą transformację Legendre'a. Uzyskano jawną postać funkcji dyssypacji, co umożliwia dualny opis plastycznych własności materiału. Trójparymetry warunek plastyczności umożliwia ciągłe przejście od warunku Druckera-Pragera do Hubera-Misesa przez odpowiedni dobór parametrów. Przedyskutowano kalibrację parametrów na podstawie typowych testów wytrzymałościowych. Na bazie założonego warunku plastyczności sformułowano relacje konstytutywne sprężysto-plastyczności, które mogą być stosowane do opisu własności porowatych metali i materiałów z tarcie wewnętrznym.

Słowa kluczowe: plastyczność, sprężystość, warunek plastyczności, kryterium wyężenia, dyssypacja, metale, żeliwo, materiały porowate.

Wstęp

Wiele materiałów inżynierskich, włączając żeliwo, porowate stopy metali, polimery, materiały geologiczne, wykazuje znaczną ciągliwość przy ściskaniu i znikomą (aż do kruchości) przy rozciąganiu [1,13,16,17]. Asymetria zachowania materiału pod obciążeniami ściskającym i rozciągającym wynika głównie z jego budowy wewnętrznej. Makroskopowy opis własności mechanicznych takich materiałów wymaga zastosowania teorii sprężystości i plastyczności, najlepiej w ramach ujęcia termodynamicznego [2,4,5,6,9].

W pracy rozpatrujemy teorię małych odkształceń sprężysto-plastycznych dotyczącą materiałów izotropowych. Stosujemy podejście opierające się na definicji dwóch potencjałów termodynamicznych, tj. potencjału Gibbsa albo Helmholtza oraz potencjału dyssypacji albo warunku plastyczności. Na tej podstawie można skonstruować termodynamicznie poprawny model materiału sprężysto-plastycznego [5]. Najbardziej wymagającym elementem teorii jest właściwe określenie warunku plastyczności albo funkcji dyssypacji, aby dobrze ilościowo ujmował własności materiału.

Proponujemy zatem trójparymetry warunek plastyczności i wyprowadzamy dualną do niego funkcję dyssypacji. Obie funkcje zależą od dwóch pierwszych niezmienników odpowiednich tensorów. Analizujemy możliwość kalibracji wolnych parametrów na podstawie typowych testów wytrzymałościowych. Podajemy również szkic wykorzystania uzyskanych równań do modelowania konstytutywnego sprężysto-plastyczności ze wzmocnieniem.

1. Schemat formułowania relacji konstytutywnych sprężysto-plastyczności

Do opisu własności materiału wykorzystujemy potencjał konstytutywny Gibbsa w postaci gwarantującej addytywny rozkład odkształceń sprężystych i plastycznych [2]:

$$g(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}_p) = -g_E(\boldsymbol{\sigma}) + g_H(\boldsymbol{\varepsilon}_p) - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_p, \quad (1)$$

gdzie $\boldsymbol{\sigma}$ jest tensorem naprężenia, $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ tensorem odkształcenia plastycznego, zaś kropką oznaczono iloczyn skalarny tensorów drugiego rzędu. Funkcja $g_E(\boldsymbol{\sigma})$ definiuje sprężyste cechy materiału - przyjmujemy ją jak dla izotropowego materiału liniowego i sprę-

żystego. Natomiast funkcja $g_H(\boldsymbol{\varepsilon}_p)$ implikuje wzmocnienie kinematyczne. Postać potencjału (1) rozdziela definicję własności sprężystych i plastycznych.

Na podstawie potencjału (1) relacja konstytutywna sprężystości i uogólnione naprężenie są określone następująco:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial g_E}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\varepsilon}_p, \quad \boldsymbol{\sigma}_p = -\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_p} = -\frac{\partial g_H}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_p} + \boldsymbol{\sigma}. \quad (2)$$

W najprostszym przypadku funkcje $g_E(\boldsymbol{\sigma})$ i $g_H(\boldsymbol{\varepsilon}_p)$ zakłada się w postaci kwadratowych funkcji skalarnych odpowiednich tensorów.

Potencjał Gibbsa (1) jest związany z potencjałem Helmholtza $F(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_p)$ poprzez transformację Legendre'a [2,11], tj.

$$F(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_p) = g(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}_p) + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (3)$$

Drugim potencjałem stosowanym w opisie własności plastycznych materiału jest nieujemna funkcja dyssypacji, którą przyjmujemy w postaci:

$$D(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) \geq 0, \quad \text{gdzie} \quad D = 0 \Leftrightarrow \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \mathbf{0}. \quad (4)$$

Zależność funkcji dyssypacji od tensora odkształcenia plastycznego $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ umożliwia włączenie do opisu izotropowego wzmocnienia materiału. Zależność dyssypacji od tensora naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$ jest stosowana w przypadku opisu niestowarzyszonej plastyczności, np. materiałów geologicznych [2,5]. W dalszych rozważaniach przyjmujemy stowarzyszoną plastyczność do modelowania własności porowatych metali lub żeliwa. Wtedy rozpatrywana funkcja dyssypacji będzie zakładana w prostszej postaci: $D(\boldsymbol{\varepsilon}_p, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p)$.

W przypadku materiałów niewrażliwych na prędkość odkształcenia funkcja dyssypacji (4) musi być funkcją jednorodną stopnia pierwszego względem tensora prędkości odkształcenia plastycznego $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$, tj. $D(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, \eta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) = \eta D(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p)$ dla dowolnego skalaru η . Korzystając z twierdzenia Eulera dla funkcji jednorodnych mamy następujący warunek nałożony na definicję funkcji dyssypacji [2,12]:

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = D. \quad (5)$$

Naprężenie dyssypatywne, związane z rozpraszaniem energii w wyniku rozwoju trwałych odkształceń, wyznaczamy z następującej zależności potencjalnej:

$$\boldsymbol{\sigma}_D = \frac{\partial D}{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p}, \quad \text{czyli} \quad D = \boldsymbol{\sigma}_D \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p. \quad (6)$$

Z warunku jednorodności (5) wynika istnienie warunku plastyczności [5,9]:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, \boldsymbol{\sigma}_D) = 0, \quad (7)$$

który określony jest w przestrzeni naprężeń $\boldsymbol{\sigma}_D$, po uprzedniej eliminacji zmiennych kinematycznych związanych z tensorem $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$. Warunek plastyczności (7) i funkcja dyssypacji (4) związane są osobliwą transformacją Legendre'a [2,11]:

$$\lambda f = \boldsymbol{\sigma}_D \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p - D = 0, \quad \lambda \geq 0. \quad (8)$$

co również implikuje $f \leq 0$, tzn. dopuszczalność zbioru naprężeń $\boldsymbol{\sigma}_D$. Parametr λ jest dowolnym skalarnym mnożnikiem, który

występuje w prawie plastycznego płynięcia (prawie ewolucji odkształcenia plastycznego):

$$\dot{\epsilon}_p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_D}, \quad \lambda \geq 0. \quad (9)$$

Zauważmy, że funkcja tensorowa (6) jest funkcją jednorodną stopnia zero względem tensora $\dot{\epsilon}_p$, czyli spełnia następujący warunek tensorowy [5,9]:

$$\frac{\partial \sigma_D}{\partial \dot{\epsilon}_p} \cdot \dot{\epsilon}_p = 0. \quad (10)$$

Zastosujemy również zasadę ortogonalności (Zieglera), postulując równość naprężeń plastycznych i dyssypatywnych [4,5,6]:

$$\sigma_p = \sigma_D. \quad (11)$$

Konstrukcję modelu materiału sprężysto-plastycznego przeprowadzimy z wykorzystaniem funkcji płynięcia $f(\sigma, \epsilon_p, \sigma_D)$ z (7) oraz prawa plastycznego płynięcia (9). Następnie wyprowadzimy zależności definiujące funkcję dyssypacji, uzyskując dualne sformułowanie modelu konstytutywnego.

Podstawowe własności matematyczne funkcji płynięcia i funkcji dyssypacji są podobne. Obie funkcje są skalarnymi funkcjami zmiennych tensorowych oraz muszą być wypukłe względem odpowiednich argumentów [10]. Cechą je odróżniającą jest wymaganie od funkcji dyssypacji nieujemności i jednorodności stopnia jeden względem jednej ze zmiennych [8,12,14]. W przypadku modelowania materiałów izotropowych funkcja dyssypacji i funkcja płynięcia muszą być funkcjami izotropowymi. To z kolei oznacza, że muszą być funkcjami niezmienników odpowiednich tensorów [7,9].

Funkcję dyssypacji (4) będziemy uzależniać od następujących trzech niezmienników tensora prędkości odkształcenia plastycznego $\dot{\epsilon}_p$:

$$p = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{tr} \dot{\epsilon}_p, \quad q = \sqrt{\text{tr} \dot{\epsilon}_p^2}, \quad \cos 3\phi = \frac{\sqrt{6} \text{tr} \dot{\epsilon}_p^3}{\sqrt{\text{tr}^3 \dot{\epsilon}_p^2}}, \quad (12)$$

gdzie $\dot{\epsilon}_p$ jest dewiatorem tensora prędkości odkształcenia plastycznego, tj. $\dot{\epsilon}_p = \dot{\epsilon}_p - \frac{p}{\sqrt{3}} \mathbf{I}$. Bazę niezmienników (12) nazywamy walcową, gdyż p , q i ϕ w przestrzeni Haigha-Westergaarda dla tensora $\dot{\epsilon}_p$, można interpretować jako współrzędne układu walcowego [10]. Izotropową funkcję dyssypacji (4) przedstawiamy zatem w następującej postaci:

$$D(\dot{\epsilon}_p) \Rightarrow D(p, q, \cos 3\phi). \quad (13)$$

Dalej założymy model, w którym w definicji funkcji dyssypacji nie będzie występował trzeci niezmiennik $\cos 3\phi$.

W przypadku tensora naprężenia σ_D rozpatrywać będziemy, analogiczne do (12), niezmienniki walcowe, tj.:

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{tr} \sigma_D, \quad r = \sqrt{\text{tr} \sigma_D^2}, \quad \cos 3\Theta = \frac{\sqrt{6} \text{tr} \sigma_D^3}{\sqrt{\text{tr}^3 \sigma_D^2}}, \quad (14)$$

w których σ_D jest dewiatorem tensora naprężenia, tj.

$$\sigma_D = \sigma_D - \frac{\xi}{\sqrt{3}} \mathbf{I}. \text{ Izotropową funkcję płynięcia plastycznego (7)}$$

przedstawiamy zatem w następującej postaci [7,9]:

$$f(\sigma_D) \Rightarrow f(\xi, r, \cos 3\Theta). \quad (15)$$

Dalej rozpatrujemy model, w którym pominiemy wpływ trzeciego niezmiennika $\cos 3\Theta$ na plastyczne płynięcie materiału.

W przypadku izotropowego materiału sprężystego część potencjału $g_E(\sigma)$ będzie funkcją kwadratową niezmienników o postaci:

$$g_E(\sigma) = \frac{1}{18K} \text{tr}^2 \sigma + \frac{1}{4G} \text{tr} \sigma^2, \quad (16)$$

gdzie G i K są odpowiednio modułami sztywności postaciowej i objętościowej. Oznacza to, że tensor odkształcenia sprężystego jest określony prawem Hooke'a:

$$\frac{\partial g_E}{\partial \sigma} = \frac{1}{9K} (\text{tr} \sigma) \mathbf{I} + \frac{1}{2G} \sigma = \epsilon_E. \quad (17)$$

Gdy rozpatrujemy liniowe wzmocnienie kinematyczne materiału, część potencjału $g_H(\epsilon_p)$ jest funkcją kwadratową niezmienników tensora odkształcenia plastycznego:

$$g_H(\epsilon_p) = \frac{1}{2} M \text{tr}^2 \epsilon_p + \frac{1}{2} H \text{tr} \epsilon_p^2, \quad (18)$$

gdzie H i M są odpowiednio modułami wzmocnienia dla części postaciowej i objętościowej. Funkcja (18) implikuje następującą postać naprężenia uogólnionego:

$$\sigma_p = -\frac{\partial g_H}{\partial \epsilon_p} + \sigma = -M (\text{tr} \epsilon_p) \mathbf{I} - H \epsilon_p + \sigma. \quad (19)$$

Zauważmy, że w przypadku braku wzmocnienia kinematycznego zachodzi równość tensorów naprężenia [2,5,6]:

$$\sigma_p = \sigma. \quad (20)$$

W dalszych rozważaniach pominiemy wzmocnienie kinematyczne materiału, stosując zależność (20).

2. Warunek plastyczności i funkcja dyssypacji

W punkcie tym przedstawimy metodę konstrukcji związków sprężysto-plastyczności z wykorzystaniem warunku plastyczności. Rozpatrzmy najprostszypadek warunku plastyczności zależnego od dwóch niezmienników stanu naprężenia (ξ, r) , który jest uproszczeniem warunków z prac [13,14,15].

Rozpatrujemy warunek plastyczności będący krzywą czwartego stopnia w przestrzeni dwóch pierwszych niezmienników tensora naprężenia. Warunek plastyczności zapiszemy następująco:

$$f(\xi, r) = \alpha^2 r_0^2 r^2 - (\xi_v - \xi)^2 (r_0^2 - r^2) = 0, \quad \xi \leq \xi_v. \quad (21)$$

W określeniu warunku występują trzy parametry materiałowe takie, że $\alpha \geq 0$, $r_0 > 0$ (z wymagania wypukłości [10]) i $\xi_v > 0$, których interpretację geometryczną podamy poniżej. Krzywa (21) na płaszczyźnie niezmienników (ξ, r) jest symetryczna względem osi przechodzącej przez wierzchołek $\xi = \xi_v$, por. Rys. 1. Do analizy przyjmujemy jedną gałąź określoną warunkiem $\xi \leq \xi_v$. Parametr α jest bezwymiarowy, natomiast parametry r_0 i ξ_v mają wymiar naprężenia i mogą być stosowane w definicji wzmocnienia materiału.

Postać (21) wygodna jest do dalszych rozważań oraz definiuje funkcję płynięcia, stosowaną w stowarzyszonym prawie plastycznego płynięcia (9). Natomiast do interpretacji parametrów materiałowych przedstawimy warunek plastyczności w postaci rozwiklanej względem obu niezmienników. Rozwikłanie funkcji (21) względem niezmiennika r prowadzi do następującej postaci:

$$r(\xi) = r_0 \sqrt{\frac{(\xi_v - \xi)^2}{(\alpha r_0)^2 + (\xi_v - \xi)^2}} \quad \text{dla} \quad \xi \leq \xi_v. \quad (22)$$

Natomiast rozwikłując równanie (21) względem pierwszego niezmiennika ξ , otrzymujemy:

$$\xi(r) = \xi_v - \alpha r_0 \sqrt{\frac{r^2}{r_0^2 - r^2}} \quad \text{dla} \quad r < r_0. \quad (23)$$

Postacie (22) i (23) rozwikłane względem jednego z niezmienników są dogodnie do interpretacji parametrów występujących w warunku plastyczności. Obliczając zatem wartość pochodnej funkcji (22) w punkcie wierzchołkowym $\xi = \xi_v$ oraz granicę przy $\xi \rightarrow -\infty$, uzyskujemy kolejno:

$$\left. \frac{dr}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_v} = -\frac{1}{\alpha} \quad \text{ i } \quad \lim_{\xi \rightarrow -\infty} r(\xi) = r_0, \quad (24)$$

co nadaje interpretację wprowadzonym parametrom, jak pokazano na Rys.1. Z kolei z postaci funkcji (23) otrzymamy:

$$\left. \frac{d\xi}{dr} \right|_{r=0} = -\alpha, \quad \text{ to } \quad \alpha = \operatorname{tg} \gamma. \quad (25)$$

Rys. 1. Wykres warunku plastyczności w płaszczyźnie południkowej. Interpretacja parametrów materiałowych. $\sigma_i = \sigma_i^* \sqrt{2}$.

Zauważmy, że propozycja (21) jest uogólnieniem klasycznych warunków plastyczności Hubera-Misesa (HM) i Druckera-Pragera (DP) [3,7,8]. Obliczając odpowiednie granice w (22) uzyskujemy kolejno:

$$\lim_{r_0 \rightarrow \infty} r(\xi) = \frac{1}{\alpha} (\xi_v - \xi), \quad \text{ czyli } \quad \xi + \alpha r - \xi_v = 0, \quad (26)$$

tj. warunek DP. Analogiczny wynik uzyskamy z (23) na podstawie obliczenia granicy $\lim_{r_0 \rightarrow \infty} \xi(r)$. Z kolei obliczając w (22) granicę o

postaci $\lim_{\alpha \rightarrow 0} r(\xi) = r_0$ przy $\xi_v \rightarrow \infty$, otrzymamy warunek HM.

Zajmijmy się obecnie wyprowadzeniem funkcji dyssypacji dla przyjętego warunku plastyczności. Stowarzyszone prawo plastycznego płynięcia jest postaci:

$$\dot{\epsilon}_p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \sigma} \right). \quad (27)$$

Ponieważ pochodne niezmienników tensora naprężenia dyssypatywnego po zastosowaniu (11) i (20) wynoszą [7]:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{I}, \quad \frac{\partial r}{\partial \sigma} = \frac{1}{r} \mathbf{s}, \quad \mathbf{s} = \sigma - \frac{\xi}{\sqrt{3}} \mathbf{I} \quad (28)$$

oraz pochodne funkcji płynięcia mają postać:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \xi} &= 2(\xi_v - \xi)(r_0^2 - r^2), \\ \frac{\partial f}{\partial r} &= 2r[\alpha^2 r_0^2 + (\xi_v - \xi)^2], \end{aligned} \quad (29)$$

to prawo płynięcia (27) przybierze postać:

$$\dot{\epsilon}_p = 2\lambda \left\{ (\xi_v - \xi)(r_0^2 - r^2) \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{I} + [\alpha^2 r_0^2 + (\xi_v - \xi)^2] \mathbf{s} \right\}. \quad (30)$$

Obliczając ślad równania tensorowego (30) określimy część kulistą relacji konstytutywnej idealnej plastyczności:

$$p = 2\lambda (\xi_v - \xi)(r_0^2 - r^2), \quad (31)$$

co implikuje część dewiatorową w postaci:

$$\dot{\epsilon}_p = 2\lambda [\alpha^2 r_0^2 + (\xi_v - \xi)^2] \mathbf{s}. \quad (32)$$

Podnosząc (32) do kwadratu i następnie licząc ślad, uzyskamy związek między drugimi niezmiennikami dewiatorów:

$$q = 2\lambda [\alpha^2 r_0^2 + (\xi_v - \xi)^2] r. \quad (33)$$

Zauważmy, że z prawa płynięcia wynika $p \geq 0$ i $q \geq 0$ w całym zakresie stanu naprężenia.

Eliminując parametr płynięcia λ z zależności (31) i (33), otrzymujemy związek:

$$\frac{p}{q} = \frac{(\xi_v - \xi)(r_0^2 - r^2)}{[\alpha^2 r_0^2 + (\xi_v - \xi)^2] r}. \quad (34)$$

Z warunku plastyczności (21) mamy następujące zależności:

$$(\xi_v - \xi)^2 = \frac{\alpha^2 r_0^2 r^2}{r_0^2 - r^2}, \quad \xi_v - \xi = \frac{\alpha r_0 r}{\sqrt{r_0^2 - r^2}}. \quad (35)$$

Wykorzystując (35) w (34) uzyskujemy następującą relację:

$$\frac{\alpha p}{q} = \sqrt{1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2}^3, \quad (36)$$

która po odwróceniu będzie miała postać:

$$\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 = 1 - \sqrt[3]{\left(\frac{\alpha p}{q} \right)^2} \quad \text{ albo } \quad r = r_0 \sqrt{1 - \sqrt[3]{\left(\frac{\alpha p}{q} \right)^2}}. \quad (37)$$

Podstawiając następnie wynik (37) do pierwszego równania (35), otrzymamy:

$$\xi = \xi_v - \alpha r_0 \sqrt[3]{\left(\frac{q}{\alpha p} \right)^2} - 1. \quad (38)$$

Zależności (37) i (38) wyrażają niezmienniki tensora naprężenia przez niezmienniki tensora prędkości odkształcenia plastycznego.

Funkcję dyssypacji wg (6) przy wykorzystaniu (30) wyznaczmy z zależności:

$$D = 2\lambda \left\{ (\xi_v - \xi)(r_0^2 - r^2) \xi + [\alpha^2 r_0^2 + (\xi_v - \xi)^2] r^2 \right\}. \quad (39)$$

Korzystając z (31) obliczymy mnożnik plastyczny:

$$2\lambda = \frac{p}{(\xi_v - \xi)(r_0^2 - r^2)} \quad (40)$$

i stosując ten wynik w (39) wraz z (34), otrzymujemy:

$$D = p\xi + qr. \quad (41)$$

Podstawiając (37) i (38) do dyssypacji (41), uzyskamy:

$$D = p\xi_v - p\alpha r_0 \sqrt[3]{\left(\frac{q}{\alpha p} \right)^2} - 1 + qr_0 \sqrt{1 - \sqrt[3]{\left(\frac{\alpha p}{q} \right)^2}}. \quad (42)$$

Otrzymana postać funkcji dyssypacji (42) obowiązuje gdy $q \geq \alpha p > 0$, czyli dotyczy regularnego płata warunku plastyczności z jednoznacznie określonym gradientem. Zapiszmy (42) w postaci wygodnej do badania przypadków szczególnych funkcji dyssypacji:

$$D = \xi_v p + r_0 \left[\sqrt{q^2 - (\alpha p q)^{\frac{2}{3}}} - \sqrt{(\alpha^2 p^2 q)^{\frac{2}{3}} - (\alpha p)^2} \right]. \quad (43)$$

W przypadku, gdy mamy punkt wierzchołkowy warunku plastyczności (21), funkcja dyssypacji jest określona wzorem:

$$D_v = \xi_v p, \quad (44)$$

a jej wykres jest płatem płaszczyzny, z przekrojami pokazanymi na Rys. 2. Połączenie płatów (43) i (44) zachodzi na linii $q = \alpha p$. Postać dyssypacji (44) jest również obowiązująca dla warunku DP, zaś równanie linii $q - \alpha p = 0$ jest wtedy równaniem więzów kinematycznych w materiale [5,7,8].

Natomiast gdy $p = 0$, z funkcji (43) uzyskujemy dyssypację o postaci:

$$D_D = r_0 q, \quad (45)$$

której interpretację graficzną w postaci punktów pokazano na Rys. 2. Jest to osobliwość związana ze stanem naprężenia w postaci hydrostatycznego ściskania, dla którego $p = 0$. Funkcja dyssypacji (45) ma zastosowanie w przypadku warunku HM z równaniem więzów nieściśliwości $p = 0$ [7,8].

Rys. 2. Przekroje stożka dyssypacji, czyli krzywe stałej wartości dyssypacji w przestrzeni niezmienników p, q .

Na Rys. 2 zamieszczono przekroje stożka dyssypacji zdefiniowanego funkcjami (43)-(45). Oznaczono na nim kolejne fragmenty krzywych związanych z płacami stożka dyssypacji. Zaznaczono też równanie linii rozgraniczającej płaty. Odcinki proste związane są z osobliwością kinematyczną wynikającą z warunku plastyczności.

W celu wyznaczenia stałych materiałowych r_0 i α , wykorzystamy próbę jednoosiowego rozciągania σ_R oraz jednoosiowego ściskania σ_C , dla których odpowiednio mamy następujące wartości niezmienników:

$$\xi_R = \frac{\sigma_R}{\sqrt{3}}, \quad r_R = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_R \quad \text{ i } \quad \xi_C = -\frac{\sigma_C}{\sqrt{3}}, \quad r_C = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_C, \quad (46)$$

zaś trzecie niezmienniki wynoszą: $\Theta_R = 0$, $\Theta_C = \pi/3$. Podstawiamy (46) do warunku (21), i uzyskujemy następujące wyniki na parametry:

$$\alpha^2 = \frac{(\sigma_C - \sigma_R)(\sigma_C + \gamma\sigma_R)^2(\gamma - 1)^2}{2\sigma_C^2(2\gamma\sigma_R + \sigma_C - \sigma_R)}, \quad (47)$$

$$r_0^2 = \frac{2\sigma_C^2(2\gamma\sigma_R + \sigma_C - \sigma_R)}{3\gamma[2\sigma_C - \gamma(\sigma_C - \sigma_R)]}, \quad \text{gdzie} \quad \xi_V = \frac{\gamma}{\sqrt{3}}\sigma_R.$$

W postaci (47) parametry materiałowe σ_R i σ_C mogą być traktowane jako funkcje materiałowe opisujące wzmocnienie materiału. Wprowadzając dodatkowy bezwymiarowy parametr opisujący asymetrię granic plastyczności materiału:

$$m = \frac{\sigma_C}{\sigma_R}, \quad (48)$$

związki (47) przedstawimy w formie:

$$\alpha^2 = \frac{(m-1)(\gamma+m)^2(\gamma-1)^2}{2m^2(2\gamma+m-1)}, \quad (49)$$

$$r_0^2 = \frac{2m^2(2\gamma+m-1)}{3\gamma[2m-\gamma(m-1)]}\sigma_R^2,$$

gdzie obecnie tylko σ_R może być traktowana jako funkcja materiałowa definiująca wzmocnienie izotropowe materiału. Przyjmując klasę materiałów dla których $\sigma_C \geq \sigma_R$, uzyskujemy ograniczenia na bezwymiarowe parametry (47) i (48):

$$m > 1 \quad \text{ i } \quad 1 < \gamma < \frac{2m}{m-1}. \quad (50)$$

Stosując dodatkowy test wytrzymałościowy czystego ścinania σ_S , dla którego niezmienniki wynoszą:

$$\xi_S = 0, \quad r_S = \sqrt{2}\sigma_S, \quad \Theta_S = \pi/6, \quad (51)$$

i przy zastosowaniu skalowania:

$$\delta = \sqrt{3}\frac{\sigma_S}{\sigma_R}, \quad r_S = \delta\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_R, \quad (52)$$

uzyskamy dodatkowe równanie do obliczenia parametru γ :

$$\delta^2(m-1)(\gamma+m)^2(\gamma-1)^2 + \gamma^3\delta^2[2m-\gamma(m-1)] = \gamma^2m^2(2\gamma+m-1). \quad (53)$$

Równanie (53) można rozwiązać analitycznie jednak wynik ma złożoną postać. Łatwiej jest rozwiązywać to równanie numerycznie przy danych wartościach m i δ .

W przypadku płaskiego stanu naprężenia rozpatrujemy płaską część tensora naprężenia $\bar{\sigma}$, dla której definiujemy niezmienniki [7,8,13]:

$$\bar{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\text{tr}\bar{\sigma}, \quad \bar{r} = \sqrt{\text{tr}\bar{\sigma}^2}, \quad \bar{s} = \bar{\sigma} - \frac{\bar{\xi}}{\sqrt{2}}\bar{\mathbf{I}}, \quad (54)$$

co implikuje następującą redukcję niezmienników (14) ze stanu przestrzennego do płaskiego:

$$\xi = \sqrt{\frac{2}{3}}\bar{\xi}, \quad r^2 = \frac{1}{3}\bar{\xi}^2 + \bar{r}^2. \quad (55)$$

Rys. 3. Warunek plastyczności dla płaskiego stanu naprężenia przy $m = 3$ i kilku wartości γ .

Stosując (55) na Rys. 3 przedstawiono przykładowe krzywe warunku plastyczności dla płaskiego stanu naprężenia, ilustrując możliwość modelu do opisu zachowania materiału o różnych granicach plastyczności.

Podsumowanie

Zaproponowano pseudo-potencjał plastycznego płynięcia (warunek plastyczności) i dualny potencjał dyssypacji w modelu materiału plastycznego. Zaproponowany trójpierametrowy warunek pla-

styczności zależy od dwóch pierwszych niezmienników tensora naprężenia dyssypatywnego i umożliwia ciągłe przejście od warunku DP do warunku HM. Oznacza to możliwość jego zastosowania do opisu konstytutywnego zarówno zachowania materiałów ciągliwych jak i z tarcie wewnątrznych (w tym porowatych, sypkich, kruchych).

W przypadku materiału idealnie plastycznego, przyrostowa relacja konstytutywna może być sformułowana na podstawie (30) i (40), czyli:

$$\frac{1}{p} \dot{\epsilon}_p = \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{I} + \frac{\alpha^2 r_0^2 - (\xi_v - \xi)^2}{(\xi_v - \xi)(r_0^2 - r^2)} \mathbf{s} \quad (56)$$

dla fazy płynięcia plastycznego.

Wykorzystując następnie addytywność odkształceń (2) z prawem Hooke'a (17) możemy sformułować przyrostowe równania konstytutywne sprężysto-plastycznego. Różniczkując po czasie (2) oraz stosując równości naprężeń (11) i (20) dla przypadku wzmocnienia izotropowego, uzyskujemy:

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{9K} (\text{tr} \dot{\epsilon}) \mathbf{I} + \frac{1}{2G} \dot{\mathbf{s}} + p \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{I} + \frac{\alpha^2 r_0^2 - (\xi_v - \xi)^2}{(\xi_v - \xi)(r_0^2 - r^2)} \mathbf{s} \right\}. \quad (57)$$

W sytuacji zachowania sprężystego obowiązują dwa pierwsze składniki w (57). Parametry r_0 i ξ_v zależą od skalarnej funkcji wzmocnienia $\sigma_R(\epsilon_p)$ tensora odkształcenia plastycznego ϵ_p .

W przypadku występowania wzmocnienia kinematycznego zamiast związku (20) obowiązuje prawo translacji o postaci (19), tj.:

$$\sigma_p = -M (\text{tr} \epsilon_p) \mathbf{I} - H \epsilon_p + \sigma, \quad (58)$$

kóre musi być uwzględnione przy transformacji warunku plastyczności z przestrzeni naprężenia dyssypatywnego σ_D do naprężenia $\sigma = \sigma_p$ [4,5,6]. Zatem parametry modelu muszą być właściwie wyznaczone z dostępnych testów materiałowych.

Zwykle przyrostowe relacje konstytutywne sprężysto-plastycznego formułuje się w taki sposób, że przyrost naprężenia jest funkcją prędkości odkształcenia, naprężenia i odkształcenia. Korzysta się wówczas z warunku zgodności (płynięcia) Pragera. Procedura postępowania jest standardowa, dlatego nie dyskutujemy jej w pracy, odsyłając do literatury [5,9].

Bibliografia:

1. Altenbach H., Tushev K., A new static failure criterion for isotropic polymers, *Mech. of Composite Mat.*, **37**, 5/6, 2001, pp. 475-482.
2. Collins I.F., Housby G.T., Application of thermomechanical principles to the modelling of geotechnical materials, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **453**, 1997, pp. 1975-2001.
3. Drucker D.C., Prager W., Soil mechanics and plastic analysis or limit design, *Q. Appl. Math.*, **10**, 1952, pp. 157-165.
4. Einav I., Housby G.T., Nguyen G. D., Coupled damage and plasticity models derived from energy and dissipation potentials, *Int. J. Solids and Structures*, **44**, 2007, pp. 2487-2508.
5. Housby G.T., Puzrin A. M., Principles of hyperplasticity: An approach to plasticity theory based on thermodynamic principles, Springer-Verlag, London 2006.
6. Housby G.T., Puzrin A. M., A thermomechanical framework for constitutive models for rate-independent dissipative materials, *Int. J. Plasticity*, **16**, 2000, pp. 1017-1047.
7. Jemioło S., Szwed A., O zastosowaniu funkcji wypukłych w teorii wytężenia materiałów izotropowych. Propozycja warunków

plastyczności metali, Oficyna Wyd. PW, Prace Naukowe, Budownictwo, **133**, 1999, str. 5-51.

8. Jemioło S., Szwed A., Dualne relacje konstytutywne idealnego płynięcia materiałów izotropowych z warunkiem plastyczności Misesa-Schleichera, Oficyna Wyd. PW, Prace Naukowe, Budownictwo **133**, 1999, str. 53-86.
9. Jemioło S., Gajewski M.D., Hipersprężysto-plastyczność, Monografie ZWMTSiP, **4**, Oficyna Wyd. PW, Warszawa 2014.
10. Kamińska I., Szwed A., O badaniu wypukłości skalarnej funkcji zależnej od niezmienników walcowych symetrycznego tensora drugiego rzędu, Sprężystość i lepkosprężystość małych odkształceń. Wybrane zagadnienia, Jemioło S. (red.), Monografie ZWMTSiP, **6**, 2017, Oficyna Wyd. PW, str. 79-94.
11. Sewell M. J., Legendre transformations and extremum principles, *Mechanics of solids: the Rodney Hill 60th anniversary volume*, Pergamon Press, Oxford, 1982, pp. 563-604.
12. Szwed A., Dissipation function for modeling plasticity in concrete, *Computer Systems Aided Science and Engineering Work in Transport, Mechanics and Electrical Engineering*, Monograph No. **122**, Pub. Office of Technical University of Radom, 2008, pp. 523-528.
13. Szwed A., Strength criterion for materials brittle in tension and ductile in compression, Rozdział V w monografii: Teoretyczne podstawy budownictwa, Tom I. Mechanika materiałów i konstrukcji, Jemioło S., Lutomirski Sz. [red.]: Oficyna Wyd. PW, 2012, str. 53-62.
14. Szwed A., Model konstytutywny ściśliwego materiału idealnie plastycznego, TTS: koleje, tramwaje, metro. Nr 9/2012, str. 2953-2962.
15. Szwed A., A strength criterion for cast iron. A monograph of Warsaw University of Technology on Mechanics and Materials, Eds. S. Jemioło, M. Lutomska, Wydział Inżynierii Lądowej, Warszawa 2013, pp. 99-108.
16. Xue L., Constitutive modeling of void shearing effect in ductile fracture of porous materials, *Engineering Fracture Mech.*, **75**, 2008, pp. 3343-3366.
17. Zhang H., Ramesh K.T., Chin E.S.C., A multi-axial constitutive model for metal matrix composites, *J. of the Mechanics and Physics of Solids*, **56**, 2008, pp. 2972-2983.

Yield condition and dissipation function for porous materials

A yield condition was proposed in this paper and associated dissipation function was derived via singular Legendre transformation. As a result, an explicit form of the dissipation function was obtained, which can be used for dual formulation of perfect plasticity model. The three-parameter yield condition enables continuous transition from the Drucker-Prager to Huber-Mises yield conditions by appropriate selection of free parameters. Calibration of the free parameters based on typical experimental tests was discussed. Based on the proposed yield function, a constitutive model of elastic-plastic material was given. The model can be used for modelling porous metals and other frictional materials.

Keywords: plasticity, elasticity, yield condition, strength criterion, dissipation, metals, cast iron, porous materials.

Autorzy:

dr inż. **Aleksander Szwed** – Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej, Instytut Inżynierii Budowlanej, ZWMTSiP, e-mail: a.szwed@il.pw.edu.pl.