Analiza teoretyczna oraz numeryczna wybranej hybrydowej metody Trefftza z wykorzystaniem techniki łączenia podobszarów opartej na idei ramek

JEL: L62 DOI: 10.24136/atest.2018.408

Data zgłoszenia: 19.11.2018 Data akceptacji: 15.12.2018

Celem artykułu jest analiza teoretyczna oraz numeryczna metody Trefftza w wersji Galerкина o symbolicznej nazwie O–S;T–T. Analizę dokonano na przykładzie dwuwymiarowego zagadnienia opisanego równaniem Poissona wyprowadzonego z silnego sformułowania wariacyjnego. Rozpatrywany obszar podzielono na podobszary w celu wyodrębnienia podobszarów strefowo jednorodnych. W ten sposób otrzymano metodę hybrydową będącą kombinacją metody brzegowej z koncepcją elementów skończonych znanych z Metody Elementów Skończonych. Do łączenia podobszarów zastosowano metodę opartą na idei ramek. Metodę O–S;T–T zaimplementowano do rozwiązania dwóch przykładowych zagadnień brzegowych, na podstawie których przeanalizowano jej dokładność w zależności od przyjętej liczby współczynników Trefftza.

Słowa kluczowe: metoda Trefftza, metoda brzegowa, BVP.

Wstęp

Metoda Trefftza jest jednym z narzędzi służących do rozwiązywania zagadnień brzegowych. Główna jej idea polega na zastosowaniu T-kompletnych funkcji spełniających jednorodne równanie różniczkowe w rozpatrywanym obszarze. Ze względu na trudności wynikające z wielu odmian, grup wersji czy nawet nazw metody Trefftza [13] nie dokonano dotychczas jej uporządkowanej klasyfikacji.

Jednym z wielu schematów klasyfikacji jest podział metod Trefftza na dwie rodziny. Pierwsza z nich obejmuje metody stosowane do analizy prostych zagadnień, w których rozwiązanie poszukuje się w całym rozważanym obszarze traktowanym jako obszar globalny.

Natomiast w skład drugiej grupy wchodzi metoda wymagająca podziału obszaru zagadnienia na podobszary (T-elementy) [6]. Metody te są wykorzystywane do badania zagadnień charakteryzujących się złożoną geometrią lub/ oraz różnorodnymi parametrami fizycznymi na podobszarach czy różnego rodzaju warunkami brzegowymi. Dyskretyzacja obszaru zagadnienia czyni te metody metodami hybrydowymi [4], [5]. Podział obszaru umożliwia rozwiązanie zagadnienia osobno w każdym podobszarze. Rozwiązanie zagadnienia globalnego uzyskuje się poprzez zastosowanie odpowiednich procedur łączenia rozwiązań z podobszarów.

Śród wielu metod łączenia podobszarów [11], [12], [14] najczęściej stosowana jest metoda bezpośrednia polegająca na powiązaniu warunkami ciągłości pola oddzielnych równań brzegowych dla każdego z podobszarów. Ma to na celu stworzenie jednego globalnego układu równań dla całego obszaru. Opis procedury bezpośredniej metody łączenia podobszarów dla zagadnienia opisanego równaniem Poissona z warunkami brzegowymi Dirichleta zawiera między innymi praca [13]. Główną zaletą bezpośredniej metody łączenia podobszarów jest prostota jej implementacji. Jednak w przypadku łączenia dużej liczby obszarów znacznie praktycz-

niejsza jest metoda łączenia oparta na koncepcji ramek [9], [13], [14].

Celem niniejszej pracy jest analiza teoretyczna oraz numeryczna zagadnienia brzegowego opisanego równaniem Poissona metodą Trefftza w wersji Galerкина o symbolicznej nazwie O–S;T–T [1], [2], [3]. Po uprzednim podziale obszaru na podobszary, rozwiązanie zagadnienia otrzymuje się przy wykorzystaniu metody łączenia obszarów za pomocą ramek.

1 Zagadnienie Poissona dla jednorodnego obszaru

Niech w obszarze Ω dane będzie zagadnienie brzegowe sformułowane klasycznie

$$\nabla^2 u = f \quad \text{w } \Omega \quad (1)$$

wraz z warunkami brzegowymi Dirichleta

$$u = \hat{u} \quad \text{na } \Gamma_u \quad (2)$$

i Neumanna

$$D_n u = q = \hat{q} \quad \text{na } \Gamma_q \quad (3)$$

gdzie Γ jest brzegiem ograniczającym obszar Ω , Γ_u oznacza brzeg z zadaniem warunkiem brzegowym Dirichleta, natomiast Γ_q brzeg z warunkiem brzegowym Neumanna (Rysunek 1). Ponadto $\hat{u}$ oraz $\hat{q}$ są znanymi funkcjami, $D_n u$ jest pochodną normalną funkcji u na brzegu, $\mathbf{n}$ jest wektorem jednostkowym w kierunku normalnym do brzegu.

Rys. 1. Geometria zagadnienia brzegowego opisanego równaniem Poissona

W celu poszerzenia możliwości znalezienia rozwiązania zagadnienia zastępuje się rozwiązanie klasyczne u rozwiązaniem przybliżonym $\tilde{u}$ a następnie stosuje metodę residuów ważonych – WRM otrzymując w ten sposób równanie

$$\int_{\Omega} \nabla^2 \tilde{u} W d\Omega = \int_{\Omega} f W d\Omega \quad (4)$$

będące silnym sformułowaniem zagadnienia brzegowego (1). Zastosowanie drugiego wzoru Greena do równania (4) przy uwzględnieniu warunków brzegowych (2) i (3) umożliwia uzyskanie silnego sformułowania wariacyjnego z wszczepionymi warunkami brzegowymi, które przybiera postać

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla^2 \tilde{u} W d\Omega + \int_{\Gamma_u} \tilde{u} D_n W d\Gamma_u - \int_{\Gamma_q} \tilde{q} W d\Gamma_q = \\ = \int_{\Omega} f W d\Omega + \int_{\Gamma_u} \hat{u} D_n W d\Gamma_u - \int_{\Gamma_q} \hat{q} W d\Gamma_q \end{aligned} \quad (5)$$

Niech rozwiązanie zagadnienia (1)-(3) będzie sumą

$$\tilde{u} = \tilde{u}_h + \tilde{u}_p \quad (6)$$

gdzie $\tilde{u}_h$ jest całką ogólną równania jednorodnego oraz $\tilde{u}_p$ całką szczególną równania niejednorodnego, czyli

$$\nabla^2 \tilde{u}_h = 0 \quad (7)$$

$$\nabla^2 \tilde{u}_p = f \quad (8)$$

W wyniku zsumowania równań (7) i (8) stronami otrzymuje się

$$\nabla^2 (\tilde{u}_h + \tilde{u}_p) = f \quad (9)$$

Przybliżając rozwiązanie (7) za pomocą szeregu funkcji Trefftza można zapisać

$$\tilde{u}_h = \sum_v a_v u_v^\circ \quad (10)$$

oraz

$$\tilde{q}_h = \sum_v a_v q_v^\circ \quad (11)$$

gdzie

$$u_v^\circ \in \{1, r^v \cos(v\varphi), r^v \sin(v\varphi)\} \quad (12)$$

natomiast $q_v^\circ = D_n u_v^\circ$. $r = |\mathbf{x}' - \dot{\mathbf{x}}|$ jest odległością między punktem wpływu $\mathbf{x}'$, nazywanym inaczej środkiem rozwinięcia Trefftza oraz punktem obszaru $\dot{\mathbf{x}}$ [1]. Nieznane współczynniki a_v w szeregu noszą nazwę współczynników Trefftza.

Przy założeniu, że funkcja wymuszająca jest stała oraz $f = 1$ rozwiązanie szczególne równania Poissona jest postaci [7]

$$\tilde{u}_p = \hat{u}_p = (x^2 + y^2)/4 \quad (13)$$

Uwzględniając równania (6)-(13) w sformułowaniu silnym omawianego zagadnienia danym wzorem (5) otrzymuje się

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla^2 (\tilde{u}_h + \hat{u}_p) W d\Omega + \int_{\Gamma_u} (\tilde{u}_h + \hat{u}_p) D_n W d\Gamma_u \\ - \int_{\Gamma_q} D_n (\tilde{u}_h + \hat{u}_p) W d\Gamma_q = \\ = \int_{\Omega} f W d\Omega + \int_{\Gamma_u} \hat{u} D_n W d\Gamma_u - \int_{\Gamma_q} \hat{q} W d\Gamma_q \end{aligned} \quad (14)$$

Biorąc pod uwagę równanie (13) w (8) równanie to przekształca się do postaci

$$\nabla^2 \hat{u}_p = f \quad (15)$$

natomiast zależność (4) w

$$\int_{\Omega} \nabla^2 \hat{u}_p W d\Omega = \int_{\Omega} f W d\Omega \quad (16)$$

Ze względu na (7) oraz (16) równanie (14) przybiera postać

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_u} \tilde{u}_h D_n W d\Gamma_u + \int_{\Gamma_q} D_n \tilde{u}_h W d\Gamma_q = \\ = \int_{\Gamma_u} (\hat{u} - \hat{u}_p) D_n W d\Gamma_u \\ + \int_{\Gamma_q} (\hat{q} - D_n \hat{u}_p) W d\Gamma_q \end{aligned} \quad (17)$$

Przyjmując wersję Galerkinia omawianej metody wagą jest $W = \{\psi_\mu\}$, zatem

$$\{\psi_\mu\} = \{u_\mu^\circ\} \quad (18)$$

Kolejnym krokiem w celu wyprowadzenia równania metody O-S;T-T dla zagadnienia Poissona jest uwzględnienie zależności (7) i (8) w (17), w wyniku czego uzyskuje się wzór

$$\begin{aligned} \sum_v a_v \left(\int_{\Gamma_u} u_v^\circ q_\mu^\circ d\Gamma_u + \int_{\Gamma_q} q_v^\circ u_\mu^\circ d\Gamma_q \right) = \\ = \int_{\Gamma_u} (\hat{u} - \hat{u}_p) q_\mu^\circ d\Gamma_u \\ + \int_{\Gamma_q} (\hat{q} - D_n \hat{u}_p) u_\mu^\circ d\Gamma_q \end{aligned} \quad (19)$$

Równanie (19) generuje układ równań, co daje możliwość wyznaczenia nieznanych współczynników a_v . Za ich pomocą oraz korzystając z zależności (6), (10) i (13) możliwe jest znalezienie rozwiązania zagadnienia w obszarze $\tilde{u}$.

2 Łączenie obszarów za pomocą ramek

Niech w obszarze Ω zdefiniowane będzie zagadnienie brzegowe opisane równaniem Poissona z warunkami brzegowymi Dirichleta i Neumanna. Rozpatrywany obszar został podzielony na dwa podobszary

$$\Omega_A \cup \Omega_B = \Omega \quad (20)$$

Wówczas w podobszarze Ω_A zagadnienie będzie zdefiniowane następująco

$$\nabla^2 u_A = f_A \quad \text{w } \Omega_A \quad (21)$$

wraz z warunkami brzegowymi

$$u_A = \hat{u}_A \quad \text{na } \Gamma_{uA} \quad (22)$$

$$q_A = \hat{q}_A \quad \text{na } \Gamma_{qA} \quad (23)$$

Analogicznie można opisać zagadnienie dla obszaru Ω_B wraz z warunkami brzegowymi

$$\nabla^2 u_B = f_B \quad \text{w } \Omega_B \quad (24)$$

$$u_B = \hat{u}_B \quad \text{na } \Gamma_{uB} \quad (25)$$

$$q_B = \hat{q}_B \quad \text{na } \Gamma_{qB} \quad (26)$$

Geometrię zagadnienia przedstawiono na Rysunku 2.

Rys. 2. Geometria zagadnienia dla obszaru $\Omega = \Omega_A \cup \Omega_B$

Zarówno w obszarze Ω_A jak i Ω_B wszystkie wzory (6) – (13) są słuszne, wobec tego można je uwzględnić w równaniu (14) odpowiednio z indeksami „A” i „B”, zatem równanie całkowo brzegowe dla obszaru Ω_A przybiera postać

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_{uA}} \tilde{u}_A D_{nA} W_A d\Gamma_{uA} - \int_{\Gamma_{qA}} \tilde{q}_A W_A d\Gamma_{qA} + \\ & \int_{\Gamma_{CA}} \tilde{u}_{CA} D_{nA} W_A d\Gamma_{CA} - \int_{\Gamma_{CA}} \tilde{q}_{CA} W_A d\Gamma_{CA} = \\ & = \int_{\Gamma_{uA}} \hat{u}_A D_{nA} W_A d\Gamma_{uA} - \int_{\Gamma_{qA}} \hat{q}_A W_A d\Gamma_{qA} \end{aligned} \quad (27)$$

oraz dla obszaru Ω_B

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_{uB}} \tilde{u}_B D_{nB} W_B d\Gamma_{uB} - \int_{\Gamma_{qB}} \tilde{q}_B W_B d\Gamma_{qB} + \\ & \int_{\Gamma_{CB}} \tilde{u}_{CB} D_{nB} W_B d\Gamma_{CB} - \int_{\Gamma_{CB}} \tilde{q}_{CB} W_B d\Gamma_{CB} = \\ & = \int_{\Gamma_{uB}} \hat{u}_B D_{nB} W_B d\Gamma_{uB} - \int_{\Gamma_{qB}} \hat{q}_B W_B d\Gamma_{qB} \end{aligned} \quad (28)$$

We wzorach (27) i (28) wprowadzono nieznaną funkcję $\tilde{u}_C$ i jej pochodną $\tilde{q}_C$ oraz założono, że na granicy między obszarami muszą być spełnione warunki ciągłości i gładkości rozwiązania, które dla obszaru Ω_A definiuje się następująco

$$\tilde{u}_A = \tilde{u}_B \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{CA} \quad (29)$$

$$\tilde{q}_A = -\tilde{q}_B \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{CA} \quad (30)$$

przy czym

$$\tilde{u}_{CA} = \tilde{u}_A - \tilde{u}_B \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{CA} \quad (31)$$

$$\tilde{q}_{CA} = \tilde{q}_A + \tilde{q}_B \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{CA} \quad (32)$$

Analogicznie wprowadzone warunki definiuje się dla obszaru Ω_B , zatem

$$\tilde{u}_B = \tilde{u}_A \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{CB} \quad (33)$$

$$\tilde{q}_B = -\tilde{q}_A \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{CB} \quad (34)$$

$$\tilde{u}_{CB} = \tilde{u}_B - \tilde{u}_A \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{CB} \quad (35)$$

$$\tilde{q}_{CB} = \tilde{q}_B + \tilde{q}_A \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{CB} \quad (36)$$

W dalszych rozważaniach biorąc pod uwagę zależność (13) można przepisać rozwiązanie zagadnienia brzegowego (6) uzupełnione o indeksy „A” i „B” dla odpowiednich obszarów

$$\tilde{u}_A = \tilde{u}_{hA} + \hat{u}_{pA} \quad (37)$$

$$\tilde{u}_B = \tilde{u}_{hB} + \hat{u}_{pB} \quad (38)$$

oraz jego pochodne w kierunku normalnym do brzegu

$$\tilde{q}_A = D_{nA} \tilde{u}_A = \tilde{q}_{hA} + \hat{q}_{pA} \quad (39)$$

$$\tilde{q}_B = D_{nB} \tilde{u}_B = \tilde{q}_{hB} + \hat{q}_{pB} \quad (40)$$

Sposób łączenia obszarów oparty na koncepcji ramek polega na wykorzystaniu specjalnej funkcji $u_f(\mathbf{x})$ wprowadzonej na brzegu Γ_C , której postać określa wzór interpolujący

$$\tilde{u}_f = \sum_{\kappa} a_{\kappa} N_{\kappa} \quad \mathbf{x} \in \Gamma_C \quad (41)$$

$N_{\kappa}(\mathbf{x})$ są funkcjami kształtu zdefiniowanymi na brzegu wspólnym Γ_C , $\kappa = 1, 2, \dots, n_{\kappa}$, np. w postaci wielomianów Lagrange'a. Uwzględniając funkcję u_f we wzorach (29)-(36) otrzymuje się dla obszaru Ω_A

$$\tilde{u}_A = \tilde{u}_{fA} \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{CA} \quad (42)$$

$$\tilde{q}_A = -\tilde{q}_B \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{CA} \quad (43)$$

$$\tilde{u}_{CA} = \tilde{u}_A - \tilde{u}_{fA} \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{CA} \quad (44)$$

$$\tilde{q}_{CA} = \tilde{q}_A + \tilde{q}_B \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{CA} \quad (45)$$

i dla obszaru Ω_B

$$\tilde{u}_B = \tilde{u}_{fB} \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{CB} \quad (46)$$

$$\tilde{q}_B = -\tilde{q}_A \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{CB} \quad (47)$$

$$\tilde{u}_{CB} = \tilde{u}_B - \tilde{u}_{fB} \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{CB} \quad (48)$$

$$\tilde{q}_{CB} = \tilde{q}_B + \tilde{q}_A \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{CB} \quad (49)$$

Dalsza analiza zagadnienia wymaga uwzględnienia w równaniu (27) zależności (32) oraz (44) dla obszaru Ω_A

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Gamma_{uA}} \tilde{u}_A D_{nA} W_A d\Gamma_{uA} - \int_{\Gamma_{qA}} \tilde{q}_A W_A d\Gamma_{qA} \\
 & + \int_{\Gamma_{CA}} (\tilde{u}_A - \tilde{u}_{fA}) D_{nA} W_A d\Gamma_{CA} - \\
 & \int_{\Gamma_{CA}} (\tilde{q}_A + \tilde{q}_B) W_A d\Gamma_{CA} \\
 & = \int_{\Gamma_{uA}} \hat{u}_A D_{nA} W_A d\Gamma_{uA} - \int_{\Gamma_{qA}} \hat{q}_A W_A d\Gamma_{qA}
 \end{aligned} \quad (50)$$

natomiast dla obszaru Ω_B zależności (36) oraz (48) w równaniu (28), które przybiera postać

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Gamma_{uB}} \tilde{u}_B D_{nB} W_B d\Gamma_{uB} - \int_{\Gamma_{qB}} \tilde{q}_B W_B d\Gamma_{qB} \\
 & + \int_{\Gamma_{CB}} (\tilde{u}_B - \tilde{u}_{fB}) D_{nB} W_B d\Gamma_{CB} - \\
 & \int_{\Gamma_{CB}} (\tilde{q}_B + \tilde{q}_A) W_B d\Gamma_{CB} \\
 & = \int_{\Gamma_{uB}} \hat{u}_B D_{nB} W_B d\Gamma_{uB} - \int_{\Gamma_{qB}} \hat{q}_B W_B d\Gamma_{qB}
 \end{aligned} \quad (51)$$

Wstawiając rozwiązanie oraz jego pochodne (37) – (40) do powyższych równań z zachowaniem postaci szeregu (10) i (11) dla wag przyjętych jako (18) otrzymuje się dla obszaru Ω_A

$$\begin{aligned}
 & \sum_{vA} a_{vA} \left[\int_{\Gamma_{uA}} u_{vA}^\circ q_{\mu A}^\circ d\Gamma_{uA} - \int_{\Gamma_{qA}} q_{vA}^\circ u_{\mu A}^\circ d\Gamma_{qA} + \right. \\
 & \left. \int_{\Gamma_{CA}} (u_{vA}^\circ q_{\mu A}^\circ - q_{vA}^\circ u_{\mu A}^\circ) d\Gamma_{CA} \right] \\
 & - \sum_{\kappa} a_{\kappa} \int_{\Gamma_{CA}} N_{\kappa} q_{\mu A}^\circ d\Gamma_{CA} - \\
 & \sum_{vB} a_{vB} \int_{\Gamma_{CA}} q_{vB}^\circ u_{\mu A}^\circ d\Gamma_{CA} \\
 & = \int_{\Gamma_{uA}} (\hat{u}_A - \hat{u}_{pA}) q_{\mu A}^\circ d\Gamma_{uA} - \\
 & \int_{\Gamma_{qA}} (\hat{q}_A - \hat{q}_{pA}) u_{\mu A}^\circ d\Gamma_{qA} \\
 & - \int_{\Gamma_{CA}} (\hat{u}_{pA} q_{\mu A}^\circ - \hat{q}_{pA} u_{\mu A}^\circ) d\Gamma_{CA} - \int_{\Gamma_{CA}} \hat{q}_{pB} u_{\mu A}^\circ d\Gamma_{CA}
 \end{aligned} \quad (52)$$

oraz dla obszaru Ω_B

$$\begin{aligned}
 & \sum_{vA} a_{vA} \left[\int_{\Gamma_{uA}} u_{vA}^\circ q_{\mu A}^\circ d\Gamma_{uA} - \int_{\Gamma_{qA}} q_{vA}^\circ u_{\mu A}^\circ d\Gamma_{qA} + \right. \\
 & \left. \int_{\Gamma_{CA}} (u_{vA}^\circ q_{\mu A}^\circ - q_{vA}^\circ u_{\mu A}^\circ) d\Gamma_{CA} \right] \\
 & - \sum_{\kappa} a_{\kappa} \int_{\Gamma_{CA}} N_{\kappa} q_{\mu A}^\circ d\Gamma_{CA} - \\
 & \sum_{vB} a_{vB} \int_{\Gamma_{CA}} q_{vB}^\circ u_{\mu A}^\circ d\Gamma_{CA} \\
 & = \int_{\Gamma_{uA}} (\hat{u}_A - \hat{u}_{pA}) q_{\mu A}^\circ d\Gamma_{uA} - \\
 & \int_{\Gamma_{qA}} (\hat{q}_A - \hat{q}_{pA}) u_{\mu A}^\circ d\Gamma_{qA} \\
 & - \int_{\Gamma_{CA}} (\hat{u}_{pA} q_{\mu A}^\circ - \hat{q}_{pA} u_{\mu A}^\circ) d\Gamma_{CA} - \int_{\Gamma_{CA}} \hat{q}_{pB} u_{\mu A}^\circ d\Gamma_{CA}
 \end{aligned} \quad (53)$$

Równania (52) i (53) są równaniami całkowo brzegowymi metody O-S;T-T dla dwóch sąsiadujących obszarów, na których zdefinio-

wane jest zagadnienie brzegowe opisane równaniem Poissona uwzględniającymi metodę łączenia za pomocą ramek.

3 Przykłady numeryczne

Metodę O-S;T-T z wykorzystaniem sposobu łączenia obszarów przy użyciu ramek zaimplementowano w środowisku Matlab do rozwiązywania dwóch testowych zagadnień brzegowych. Wyniki analizy numerycznej odniesiono do rezultatów otrzymanych przy pomocy biblioteki pakietu Matlab - PDE Toolbox, które rozwiązuje równania różniczkowe cząstkowe metodą elementów skończonych. W celach porównawczych, w poniższych przykładach wykorzystano identyczne siatki elementów trójkątnych zarówno podczas analizy elementami Trefftza, jak i standardowymi elementami skończonymi.

Porównania dokonano z wykorzystaniem trzech miar błędów: E_{RMS} , E_L oraz E_{max} . E_{RMS} jest pierwiastkiem błędu średniokwadratowego ($[R]oot [M]ean [S]quare [E]rror$) danym wzorem

$$E_{RMS} = \left(\sum_i (\tilde{u}_i - u_i)^2 / n_i \right)^{1/2} \quad (54)$$

gdzie:

$\tilde{u}$ – rozwiązanie przybliżone
 u – rozwiązanie PDE Toolbox
 n_i – ilość punktów pola

Przedstawiona na wykresach jakościowa miara błędu E_L definiowana jest jako różnica pomiędzy rozwiązaniem PDE Toolbox a przybliżonym

$$E_L = |u_i - \tilde{u}_i| \quad (55)$$

Błędem maksymalnym jest maksymalna wartość błędu E_L

$$E_{max} = \max |u_i - \tilde{u}_i| \quad (56)$$

Przykład 1

W obszarze kwadratowym Ω zdefiniowano dwuwymiarowe zagadnienie brzegowe opisane równaniem Poissona z jednostkowym wymuszeniem. Na całym brzegu zadano zerowy warunek Dirichleta (Rysunek 3).

Rys. 3. Rozwiązanie otrzymane przy pomocy PDE Toolbox zagadnienia z przykładu 1

Analizę numeryczną zagadnienia wykonano po uprzednim podziale obszaru Ω na dwa podobszary globalne (Rysunek 4). Cał-

kowanie numeryczne wykonano przy 8 węzłowej kwadraturze Gaussa, natomiast punkty wpływu wybrano dla każdego podobszaru z osobna i umieszczono je w ich środkach ciężkości.

Rys. 4. Geometria zagadnienia dla obszaru $\Omega = \Omega_A \cup \Omega_B$

Każdy z globalnych podobszarów dyskretyzowano elementami trójkątnymi. Ostatecznie obszar Ω składał się z 346 elementów trójkątnych (Rysunek 5). W Tabeli 1 zamieszczono wyniki obliczeń numerycznych w zależności od liczby współczynników a_v dla każdego z podobszarów.

Rys. 5. Dyskretyzacja obszaru Ω dla zagadnienia z przykładu 1

Tab. 1. Wielkości błędu E_{RMS} oraz E_{max}

Liczba współczynników a_v		E_{max}	E_{RMS}
Ω_A	Ω_B		
5	5	0.0129	0.0016
7	7	0.0060	7.6197e-04
9	9	0.0087	6.8514e-04
11	11	0.0064	5.1676e-04
13	13	0.0057	4.6442e-04

Na Rysunkach (6) – (10) przedstawiono rozkład błędu E_L dla każdej z przyjętej liczby współczynników a_v .

Rys. 6. Wartość błędu E_L dla $a_v = 5$

Rys. 7. Wartość błędu E_L dla $a_v = 7$

Rys. 8. Wartość błędu E_L dla $a_v = 9$

Rys. 9. Wartość błędu E_L dla $a_v = 11$

Rys. 10. Wartość błędu E_L dla $a_v = 13$

Przykład 2

W obszarze dwuwymiarowym Ω dane jest zagadnienie brzegowe, na którego części spełnione jest równanie różniczkowe Poissona z wymuszeniem $f(x) = 1$, natomiast w pozostałej równanie Laplace'a. Z racji niejednorodności operatorowej geometria zagadnienia wraz z przyjętym do analizy numerycznej podziałem obszaru Ω na cztery globalne jednorodne podobszary została zamieszczona na Rysunku 11.

Rys. 11. Geometria zagadnienia dla przykładu 2

Do analizy numerycznej zagadnienia przyjęto założenie, że w podobszarach Ω_2 oraz Ω_4 spełnione jest równanie Poissona. W pozostałych obszarach obowiązuje równanie Laplace'a.

Rys. 12. Dyskretyzacja obszaru Ω dla zagadnienia z przykładu 2

Analogicznie jak w przykładzie 1, w Tabeli 2 zamieszczono wartości błędów otrzymanych w zależności od liczby współczynników a_v dla każdego z podobszary. W tym przypadku obszar dyskrety-

zowano w miarę równomierną siatką składającą się z 1472 elementów trójkątnych (Rysunek 12).

Tab. 2. Wielkości błędu E_{RMS} oraz E_{max}

Liczba współczynników a_v				E_{max}	E_{RMS}
Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4		
5	5	5	5	0.0045	2.4740e-04
7	7	7	7	0.0038	1.3188e-04
9	9	9	9	0.0034	1.5159e-04
11	11	11	11	0.0010	7.0124e-05
13	13	13	13	9.8095e-04	5.6175e-05

Rozwiązanie zagadnienia otrzymane przy pomocy PDE Toolbox przedstawiono na Rysunku 13.

Rys. 13. Rozwiązanie otrzymane przy pomocy PDE Toolbox zagadnienia z przykładu 2

Na Rysunkach (14) – (18) zamieszczono z kolei rozkład błędu E_L dla wybranej liczby współczynników a_v , analogicznie jak w przykładzie 1.

Rys. 14. Wartość błędu E_L dla $a_v = 5$

Rys. 15. Wartość błędu E_L dla $a_v = 7$

Rys. 16. Wartość błędu E_L dla $a_v = 9$

Rys. 17. Wartość błędu E_L dla $a_v = 11$

Rys. 18. Wartość błędu E_L dla $a_v = 13$

Wraz ze wzrostem liczby współczynników Trefftza dla każdego z podobszarów otrzymywano wyniki obarczone coraz mniejszym błędem, co oznacza, że dokładność metody można poprawić między innymi poprzez odpowiedni dobór liczby współczynników a_v .

Podsumowanie

W artykule dokonano analizy teoretycznej metody łączenia podobszarów opartej na koncepcji ramek. Wyprowadzono równania całkowo brzegowe metody O-S;T-T dla dwóch sąsiadujących obszarów, na których zdefiniowane jest zagadnienie brzegowe opisane równaniem Poissona. Metodę O-S;T-T z wykorzystaniem sposobu łączenia obszarów przy użyciu ramek zaimplementowano w środowisku Matlab do rozwiązywania dwóch przykładowych zagadnień brzegowych. Na ich podstawie przeprowadzono analizę numeryczną metody. Wyniki analizy porównano z rezultatami otrzymanymi za pomocą narzędzia PDE Toolbox, korzystającego z metody elementów skończonych do rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych. W celu dokonania oceny jakości stosowanej metody posłużono się trzema miarami błędów w zależności od liczby współczynników Trefftza dla każdego z podobszaru. Wyniki symulacji numerycznych potwierdzają efektywność metody O-S;T-T korzystającej z techniki łączenia podobszarów opartej na idei ramek w analizie zagadnień brzegowych.

Bibliografia:

1. Brański A., Borkowska D., Effectiveness of nonsingular solutions of the boundary problems based on Trefftz methods, "Engineering Analysis with Boundary Elements" 2015, nr 59, 97-104.
2. Brański A., Borkowska D., Galerkin versions of nonsingular Trefftz methods derived from variational formulations for 2D Laplace problem, "Acta Physica Polonica A" 2015, nr 128, 1 A, 50-55.
3. Brański A., Metody numeryczne rozwiązywania zagadnień brzegowych. Klasyfikacja i przegląd, Oficyna wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów 2013.
4. Jirousek J., New trends in hybrid-Trefftz p-element approach The Finite Element Method in the 90's, Springer, Barcelona 1991.
5. Jirousek J., Qin Q. H., Application of hybrid-Trefftz element approach to transient heat conduction analysis, "Computers & Structures" 1996, nr 58, 195-201.

6. Karaś M., Zieliński A., Boundary-value recovery by the Trefftz approach in structural inverse problems, "Communications in Numerical Methods in Engineering" 2006, nr 24, 605-625.
7. Kita E., Ikeda Y., Kamiya N., Indirect Trefftz method for boundary value problem of Poisson equation, "Engineering Analysis with Boundary Elements" 2003, nr 27, 825-833.
8. Kołodziej J., Grabski J., Many names of the Trefftz method, "Engineering Analysis with Boundary Elements" 2018, nr 96, 169-178.
9. Kołodziej J., Zieliński A., Boundary Collocation Techniques and their Application in Engineering, WIT Press, Southampton, Boston 2009.
10. Li Z. C., Bui T. D., Coupling techniques in boundary-combined methods, "Engineering Analysis with Boundary Elements" 1992, nr 10, 75-85.
11. Li Z. C., Bui T. D., Six ations of the Ritz-Galerkin and finite element methods for elliptic boundary value problem, "Numerical Methods for Partial Differential Equations" 1988, nr 4, 197-218.
12. Li Z. C., Lu T. T., Hu H. Y., Cheng A. H. D. Trefftz and collocation methods, WIT Press, Southampton, Boston 2008.
13. Zieliński A. P., Zienkiewicz O. C., Generalized finite element analysis with T-complete boundary solution functions, "International Journal For Numerical Methods In Engineering" 1985, nr 21, 509-528.
14. Zienkiewicz O. C., Trefftz type approximation and the generalized finite element method – history and development, "Com-

puter Assisted Mechanics and Engineering Sciences" 1997, nr 4, 305-316.

Theoretical and numerical analysis of selected hybrid Trefftz method with the use of method of subdomains coupling based on "frame" concept.

The aim of this paper is theoretical and numerical analysis of Trefftz method in Galerkin version, which symbol is O-S;T-T. The analysis was conducted on the example of two-dimensional Poisson's problem. Domain of interest was divided into homogeneous subdomains. In this way hybrid method was obtained, that is a combination of the boundary method with conventional finite element known from the Finite Element Method. The method based on idea of "frames" was used to couple subdomains. Finally, the results of numerical experiments obtained for two boundary value problems were presented. The accuracy of the method was analyzed depending on the number of Trefftz coefficients.

Keywords: Trefftz method, boundary method, BVP.

Autorzy:

dr inż. **Dorota Borkowska** – Politechnika Rzeszowska, Wydział Zarządzania, Zakład Informatyki w Zarządzaniu,
E-mail: db@prz.edu.pl